Nota: *En nuestro número 727 del boletín incluimos la primera parte de la vida del matemático János Bolyai quien finalmente construiría una geometría nueva y consistente a pesar de que la prioridad de este descubrimiento se atribuye a Carl Friedrich Gauss.*
El autor de este artículo es Santiago Gutiérrez y el sitio de donde fue tomado este texto es:
https://revistasuma.fespm.es/sites/revistasuma.fespm.es/IMG/pdf/63/107-112.pdf

János Bolyai: la revolución de la geometría no euclideana
Segunda y última parte

Santiago Gutiérrez
Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas

Los antecedentes de las geometrías no euclideanas

Para comprender la magnitud de la obra de Janos debemos de tener en cuenta el problema de partida y la razón por la que tantos matemáticos lo abordaron durante más de veinte siglos a lo largo de la historia. La cuestión que se planteó es si el V postulado de Euclides era realmente un postulado, o sea, independiente de los otros cuatro, o por el contrario podía deducirse de ellos y, en consecuencia, no resultaba necesario para la construcción del edificio geométrico de Euclides.

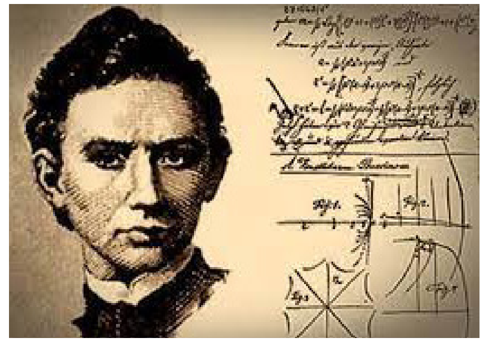
Pero, ¿por qué precisamente fue el V y no otro el postulado que llamó la atención de los matemáticos en este sentido? Quizá la razón hay que buscarla en la redacción con que estaba formulado. Euclides se expresa así:

> Se pide:
> Que de cualquier punto se pueda conducir una recta a todo otro punto. (Postulado I)
> Y que, toda recta limitada, se pueda prolongar indefinidamente por derecho. (Postulado II)
> Y que, con cualquier centro y cualquier distancia, se pueda describir un círculo. (Postulado III)
> Y que Todos los ángulos rectos sean iguales entre sí. (Postulado IV).

Junto a enunciados tan sencillos e intuitivos como los de estos cuatro primeros, el V postulado se describe de una forma un tanto compleja. Dice:

> Y que si una recta, cortando a otras dos, forma los ángulos internos a una misma parte, menores de dos rectos, las dos rectas prolongadas al infinito se encontrarán de la parte en que son los dos ángulos menores de dos rectos[1].

No es de extrañar que este V postulado hubiese llamado la atención, cuando menos, de matemáticos de todas las



épocas, como, entre otros, Posidonio (s. I), Proclo, Saccheri, Legendre, Lagrange, y el mismo Farkas, padre de Janos.

Incluso el propio Euclides parece sospechar algo al respecto ya que lo elude siempre que puede, aunque ello le condujese a recorridos más largos en sus demostraciones. Todos los matemáticos que se enfrentaban al V postulado intuían que podría ser demostrado a partir de los otros cuatro. Si esto fuera así, pensaban, el hecho de negarlo llevaría a una contradicción, y en caso contrario, si no se encontraba contradicción, y en algún momento resultaba necesario para poder continuar, es que el V postulado era independiente de los otros cuatro, y por tanto indispensable para la construcción geométrica de Euclides.

Lo que hacían estos matemáticos era sustituir el enunciado de Euclides por otro, pero con el resultado de que entonces se podía demostrar el V de Euclides, es decir, que en realidad sustituían el postulado de las paralelas por otro equivalente. Así, el jesuita italiano Saccheri demuestra que el V postulado de Euclides es equivalente al siguiente:

> *La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos.*

Precisamente esta afirmación es una de las que tiene que demostrar Euclides antes de su proposición 29 para eludir el postulado de las paralelas.

La forma equivalente del V postulado que más se extendió, y que suelen recoger los textos matemáticos, como hace nuestro P. Puig Adam, demostrando incluso su equivalencia en la Geometría Métrica, tomo I, es la siguiente:

> *Por un punto exterior a una recta pasa una sola paralela a ella*

Esta formulación del V postulado, atribuida generalmente al matemático inglés John Playfair, si bien no ha conseguido su objetivo de demostrar la independencia del postulado euclideano, ha servido, como veremos, para sugerir la solución del problema, ya que lo traslada directamente al terreno del paralelismo. Ahora bien, Euclides da una definición un tanto abierta del concepto de rectas paralelas:

> Paralelas son las rectas de un plano que prolongadas por sus dos partes en ninguna de ellas se encuentran.

Y como señala muy bien Santaló:
Queda así abierta la posibilidad de que existan rectas asintóticas, es decir, rectas que, como ocurre con la hipérbola y sus asíntotas, nunca se encuentren, pero que sin embargo no se conserven equidistantes, sino que su distancia llegue a hacerse tan pequeña como se quiera, sin reducirse nunca a cero.

La genialidad de Janos consistió en sustituir el V postulado por un contrario, y no como habían hecho los matemáticos anteriores, que lo sustituían por otros enunciados a la postre equivalentes

La obra de Janos Bolyai

Con todos estos antecedentes, tenemos al joven Janos estudiando en Viena, en 1820, enfrascado en la cuestión de las paralelas, lo mismo que hiciera su padre, aunque sin ningún éxito. Este llega a advertirle en una emotiva y patética carta, en ese mismo año de 1820, de los peligros que encierra dedicarse a ese tema, invitándole a abandonar la investigación. Se expresa en los siguientes términos:

> No debes intentar ese camino hacia las paralelas, yo lo conozco hasta su final. He atravesado esa noche sin fondo que extinguió toda la luz y toda la alegría de mi vida. ¡Por Dios! Te suplico que abandones las paralelas, aborrécelas como si fuera una pasión indecente, te pueden privar (como me ha ocurrido a mi) de tu tiempo, de tu salud, de la tranquilidad de espíritu y de la felicidad de tu vida…Yo ya me convertí en un mártir que deseaba suprimir la imperfección de la geometría y retorné purificado al mundo…Volví a ellas, sin embargo, cuando me di cuenta de que ningún hombre ha sido capaz de encontrar el fondo de esa noche. Lo hice desconsolado y lleno de una gran pena. He viajado por todos los escollos de este infernal mar Muerto y siempre he vuelto con el mástil roto y las velas rasgadas…Arriesgué atolondradamente mi vida y mi felicidad. Aut Caesar aut nihil (O Cesar o nada, divisa de Cesar Borgia).

Incluso, en una carta a un amigo, se expresa Gauss en términos sumamente elogiosos para Janos: considero a este joven geómetra Bolyai como un genio de primera clase

Parece ser que Janos había hecho amistad con Szász, durante su estancia en Viena, y que ambos amigos mantenían largas conversaciones sobre la cuestión de las paralelas, incluso, según indica Roberto Bonola, fue el propio Szász quien le dio la idea de sustituir el V postulado por otro que considerase la paralela a una recta por un punto exterior a ella como la posición límite de la secante a la recta dada, que gira alrededor del punto exterior, es decir, una recta, esta posición límite, asintótica a la dada.

De cualquier manera que fuese, el caso es que la genialidad de Janos consistió en sustituir el V postulado por un contrario, y no como habían hecho los matemáticos anteriores, que lo sustituían por otros enunciados a la postre equivalentes, con lo que no podían conseguir el objetivo.

En 1821, Szász abandona Viena, muere su madre, y Janos, solo y entristecido se entrega al trabajo denodadamente en la nueva dirección que habían tomado sus especulaciones. Al cabo de dos años, después de sustituir el V postulado por este otro:

Por un punto exterior a una recta pasan infinitas paralelas.

en clara contradicción con el V de Euclides, desarrolla nuevamente una geometría, en abstracto, y cree haber conseguido su objetivo. Desde su primer destino, en Temesvár, año de 1823, escribe eufórico a su padre:

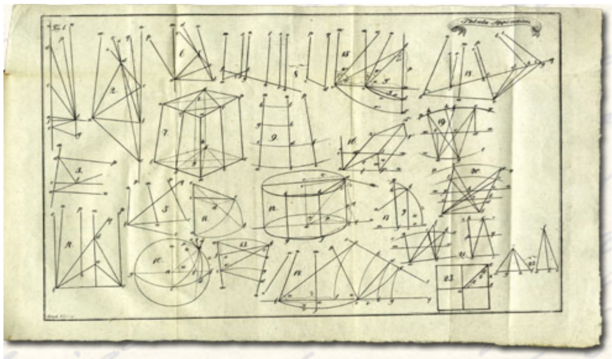
> ¡Mi querido y buen padre! Tengo tanto que escribirle acerca de mis nuevos hallazgos que, por el momento, no puedo discutirlos aquí en profundidad, así que se los voy a escribir en una cuartilla aparte…Estoy decidido a publicar ahora una obra sobre la teoría de las paralelas, apenas haya ordenado la materia y las circunstancias me lo permitan. Por el momento no he encontrado aún el camino definitivo, pero he descubierto cosas tan hermosas que yo mismo me he quedado sorprendido de ellas… Ahora no puedo añadiros nada más; solo esto: he creado un mundo nuevo y diferente a partir de la nada… Estoy tan persuadido de que esto me dará gloria, como si eso ya hubiera sucedido.

Ese mundo nuevo a que alude Janos en su carta, es lo que conocemos hoy como la geometría hiperbólica.
Cuando Farkas leyó la carta de su hijo pensó de entrada en publicarla. Incluso en 1825 recibió la visita de Janos en Marosvásárhely, pero este se marchó decepcionado al comprobar el poco interés que su padre había mostrado por la teoría. Da toda la impresión de que no la entendió suficientemente como para poder valorarla en sus justos términos.
Cuando viajaba a su destino de Lemberg, en 1831, Janos volvió a visitar a su padre. Esta vez sí que fue mejor comprendido. Farkas le recomendó que redactara su trabajo lo antes posible para su publicación, eso sí, como *Appendix* a su Tentamen. Si bien la preimpresión del Apéndice se hizo en 1831, no salió en el primer volumen del *Tentamen*, todo ello en latín, hasta 1832. El apéndice ocupaba tan solo 24 páginas.

La intervención de Gauss

No tardó Farkas en enviar una copia del Appendix a su amigo Gauss. Le pedía su opinión sobre el escrito de Janos. Pero tuvo que hacerle Farkas un segundo envío, al año siguiente, ya que no había recibido respuesta al primero. Al fin, mes y medio después de recibir este segundo envío, contestó Gauss con una carta nada halagadora. En una de sus partes le decía:

> Respecto al trabajo de tu hijo comienzo por decirte, aunque te sorprenderás por un momento, que si yo lo alabara, ello comportaría alabarme a mí mismo, porque el



> contenido completo del trabajo, el camino seguido por tu hijo y las conclusiones a las que llega, coinciden casi exactamente con mis propias ideas, que han ocupado mi pensamiento durante los pasados treinta o treinta y cinco años. Esto me ha dejado, en efecto, estupefacto.

Puede comprenderse la decepción de los Bolyai, tanto del padre como del hijo, pero sobre todo de éste, al enterarse de que ya Gauss conocía al menos las ideas de Jano. Pero, ¿por qué entonces no había desarrollado y publicado nada Gauss sobre el tema? En alguna de las cartas a sus amigos, confiesa que no lo había hecho por miedo a los gritos de los beocios, a que se burlaran de él, en definitiva. Con todo, en la misma carta a Farkas, que tanta decepción supuso para los Bolyai, añade, en otro párrafo:

> Me sorprende en exceso que me despojen de ese trabajo pero, al mismo tiempo, me siento particularmente dichoso de saber que la fatiga de una redacción me ha sido evitada por el hijo de mi viejo amigo, que me ha adelantado de tan excelente manera.

Incluso, en una carta a un amigo, se expresa Gauss en términos sumamente elogiosos para Janos:

> Considero a este joven geómetra Bolyai como un genio de primera clase.

Y en una carta dirigida al matemático alemán C. L. Gerling, reconoce que sus ideas de 1798 (sobre la geometría no euclídea) estaban muy lejos de la madurez que se apreciaba en las de Janos. Parece que Gauss quisiera dulcificar sus despectivas afirmaciones iniciales sobre los trabajos de Janos.

Las decepciones continuaron

En 1837, Janos había escrito un trabajo, basado en los mismos principios en los que Hamilton basaba su teoría de los números complejos, que titulaba *Responsio*. Lo presentó a un concurso organizado por la Sociedad Científica de Leipzig. No lo ganó. Pero, lo más notable es que se trataba de un trabajo terminado en 1831, es decir, bastante antes de que Hamilton hubiese presentado sus investigaciones sobre el tema a la Academia de Dublín.
En 1848, recibió Janos el escrito de Lobachevski, aparecido en 1829, sobre el tema de las paralelas, coincidente en buena parte con el *Appendix*. ¿Había sido Janos víctima de un plagio? Fue lo primero que pensó, pero posteriormente reflexionó sobre el asunto y, más tranquilo, escribió unos comentarios científicos al trabajo de Lobachevski. Con todo, lo cierto es que Lobachevski se le había adelantado. Hoy sabemos que ambos construyeron sus geometrías independientemente uno del otro, y aproximadamente por las mismas fechas, de modo que la geometría no euclideana hiperbólica es también conocida como la de Bolyai–Lobachevski.
No tuvo éxito Janos Bolyai entre la comunidad científica húngara. De esto se lamentaba Farkas en una carta dirigida a Gauss, en 1836:

> Aquí nadie necesita las matemáticas; aparte de mis alumnos, solo algunas personas sienten algo hacia esa ciencia.

El profesor Hoüel, de la universidad de Burdeos, traductor al francés del Appendix, se expresaba en parecidos términos:

> Me siento afligido al ver lo poco que Hungría aprecia los descubrimientos científicos que se producen en su suelo.

Por su parte, Janos, decepcionado, aislado de otros científicos, no dejó de trabajar por su cuenta y de realizar descubrimientos matemáticos, pero no volvió a publicar ninguna de sus investigaciones. Algunas se han descubierto tardíamente entre sus papeles, como sobre la axiomatización de la geometría, el cálculo del volumen del tetraedro en la geometría hiperbólica, varios teoremas sobre teoría de números, etc. Se cuenta que dejó escritas más de 20.000 páginas sobre matemáticas.
En su honor se dio el nombre de Bolyai a un cráter sobre la Luna.

NOTAS

[1] En la traducción al castellano de los Elementos de Euclides, se sigue aquí la realizada por José Mingot Shelly, de la edición italiana de Federico Enriques, publicada por el Instituto "Jorge Juan" de Matemáticas. Madrid, 1954.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Enriques, F. (1954): *Los elementos de Euclides.* Madrid: I. "Jorge Juan" de Matemáticas.
Santaló, L. (1961): *Geometrías no euclideanas.* Buenos Aires: EUDEBA.
Garcia Merayo, F. (2009): *Janos Bolyai. El geómetra revolucionario.* Madrid: Nivola.